

Soluciones Hoja 7. Pedro Balodis

Problema 1. Calcular las siguientes primitivas:

a) $I = \int (x^2 + 3x) \left(5x^3 - \frac{8}{x^3} \right) dx$:

Solución:

$$\begin{aligned} I &= \int \left(5x^5 + 15x^4 - \frac{8}{x} - \frac{24}{x^2} \right) dx \\ &= \frac{5}{6}x^6 + 3x^5 - 8 \log |x| + \frac{24}{x} + C \end{aligned}$$

b) $I = \int \left[e^x(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{5x-2} \right] dx$:

Solución:

$$\begin{aligned} I &= \int \left[e^{2x} - 1 + \frac{1}{5x-2} \right] dx \\ &= \frac{1}{2}e^{2x} - x + \frac{1}{5} \log |5x-2| + C \end{aligned}$$

c) $I = \int \left(3 \operatorname{sen}(5x) - \frac{x}{2} - \frac{5}{1+4x^2} \right) dx$:

Solución:

$$I = -\frac{3}{5} \cos(5x) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2} \arctan(2x) + C$$

d) $I = \int \left(\frac{x}{1+x^2} + \frac{2}{(4x+1)^2} + \frac{4}{\sqrt{1-2x^2}} \right) dx$:

Solución:

$$I = \frac{1}{2} \log(1+x^2) - \frac{1}{2}(4x+1)^{-1} + \frac{4}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsen}(\sqrt{2}x) + C$$

Problema 2. Calcular las siguientes primitivas, integrando por partes:

a) $I = \int (x^2 - 2x)e^{5x-3} dx$:

Solución: Tomando $u = x^2 - 2x$, $du = (2x - 2)dx$; $dv = e^{5x-3} dx$, $v = \frac{1}{5}e^{5x-3}$, luego

$$\begin{aligned} I &= \int u dv = uv - \int v du = \frac{1}{5}(x^2 - 2x)e^{5x-3} - \frac{2}{5} \int \underbrace{(x-1)}_u \underbrace{e^{5x-3} dx}_{dv} \\ &= \frac{1}{5}(x^2 - 2x)e^{5x-3} - \frac{2}{25}(x-1)e^{5x-3} - \frac{2}{25} \int e^{5x-3} dx \\ &= \frac{1}{5}(x^2 - 2x)e^{5x-3} - \frac{2}{25}(x-1)e^{5x-3} - \frac{2}{125}e^{5x-3} + C \end{aligned}$$

b) $I = \int x \cos(5x) dx$:

Solución: Tomando $u = x$, $du = dx$; $dv = \cos(5x) dx$, $v = \frac{1}{5} \operatorname{sen}(5x)$, luego

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{5}x \operatorname{sen}(5x) - \frac{1}{5} \int \operatorname{sen}(5x) dx \\ &= \frac{1}{5}x \operatorname{sen}(5x) + \frac{1}{25} \cos(5x) + C \end{aligned}$$

c) $I = \int e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx$:

Solución: Tomando $u = e^{-x}$, $du = -e^{-x}dx$; $dv = \operatorname{sen} x \, dx$, $v = -\cos x$, luego

$$\begin{aligned} I &= -e^{-x} \cos x - \int \underbrace{e^{-x}}_u \underbrace{\cos x \, dx}_{dv} \\ &= -e^{-x} \cos x + e^{-x} \operatorname{sen} x - I \end{aligned}$$

de dónde

$$I = \frac{1}{2} e^{-x} [\operatorname{sen} x - \cos x] + C$$

d) $I = \int x \sqrt{x+1} \, dx$:

Solución: Tomando $u = x$, $du = dx$; $dv = \sqrt{x+1} \, dx$, $v = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}$, luego

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{3} x(x+1)^{3/2} - \frac{2}{3} \int (x+1)^{3/2} \, dx \\ &= \frac{2}{3} x(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15} (x+1)^{5/2} + C \end{aligned}$$

Problema 3. Calcular $I = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^k x \, dx$; $k = 3, 7$:

Solución: Para $k = 3$,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x (1 - \cos^2 x) \, dx \\ &= -\cos x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos^2 x \, dx \\ &= 1 - \left[-\frac{1}{3} \cos^3 x \Big|_0^{\pi/2} \right] \\ &= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

De modo similar, para $k = 7$:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x (1 - \cos^2 x)^3 \, dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x [1 - 3 \cos^2 x + 3 \cos^4 x - \cos^6 x] \, dx \\ &= 1 - 3 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

Problema 4. Calcular, descomponiendo en fracciones simples:

a) $I = \int \frac{x}{(x-1)(x-3)} \, dx$:

Solución: Como $\operatorname{gr}(x) = 1 < 2 = \operatorname{gr}[(x-1)(x-3)]$, podemos escribir

$$\frac{x}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} = \frac{(A+B)x - 3A - B}{(x-1)(x-3)}; \quad A = -\frac{1}{2}, \quad B = \frac{3}{2}$$

luego

$$I = -\frac{1}{2} \log|x-1| + \frac{3}{2} \log|x-3| = \log \frac{|x-1|^{1/2}}{|x-3|^{3/2}} + C$$

b) $I = \int \frac{x^3 + 1}{x^3 + x} dx$:

Solución: Haciendo la división entera de los polinomios correspondientes (si $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios, existen polinomios únicos $d(x)$ y $r(x)$ con $\text{gr}(r) < \text{gr}(q)$ y $p(x) = d(x)q(x) + r(x)$). $\frac{x^3 + 1}{x^3 + x} = 1 + \frac{1 - x}{x(x^2 + 1)}$, y podemos escribir

$$\frac{1 - x}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} \Rightarrow 1 - x = A(x^2 + 1) + (Bx + C)x, \forall x$$

luego $A = 1$, $B = -2$, $C = -1$, de dónde

$$I = \log|x| - \log(x^2 + 1) - \arctan x + C$$

c) $I = \int \frac{2}{(x-1)(x+3)^2} dx$:

Solución: Podemos escribir

$$\frac{2}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2} \Rightarrow 2 = A(x+3)^2 + B(x-1)(x+3) + C(x-1), \forall x$$

luego $A = 1/2$, $B = 1$, $C = -1/2$, de dónde

$$I = \frac{1}{2} \log|x-1| - \log|x+3| - \frac{1}{2}(x+3)^{-1} + C$$

d) $I = \int \frac{5x^2 + 5}{(x^2 - 1)(x^2 + 2x + 2)} dx$:

Solución: Podemos escribir

$$\frac{5x^2 + 5}{(x^2 - 1)(x^2 + 2x + 2)} = \frac{5x^2 + 5}{(x-1)(x+1)[(x+1)^2 + 1]} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2}$$

luego $A = 1$, $B = -1$, $C = 8$, $D = -3$, de dónde

$$I = \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + 4 \log(x^2 + 2x + 1) - 5 \arctan(x+1) + C$$

Problema 5. Hallar f' , usando el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC):

a) $f(x) = \int_0^x (1+t^2)^{-2} dt$:

Solución: Aplicación inmediata del TFC proporciona $f'(x) = (1+x^2)^{-2}$.

b) $f(x) = \int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3} dt$:

Solución: $f = g \circ h$, con $g(x) = \int_0^x (1+t^2)^{-3} dt$, $h(x) = x^2$, luego el TFC junto con la Regla de la Cadena, proporciona

$$f'(x) = g'(x^2)2x = (1+x^4)^{-3}2x$$

c) $f(x) = \int_{x^3}^{x^2} (1+t^2)^{-3} dt$:

Solución: $f = g \circ h - g \circ k$, con $g(x) = \int_0^x (1+t^2)^{-3} dt$, $h(x) = x^2$, $k(x) = x^3$, luego el TFC junto con la Regla de la Cadena, proporciona

$$f'(x) = g'(x^2)2x - g'(x^3)3x^2 = (1+x^4)^{-3}2x - (1+x^6)^{-3}3x^2$$

Problema 6. Probar que $\int_0^x |t| dt = \frac{1}{2}x|x| \forall x$:

Solución: Lo más simple, según el TFC, es comprobar que $((1/2)x|x|)' = |x| \forall x$, pero como

$$\frac{1}{2}x|x| = \begin{cases} x^2/2 & , x \geq 0 \\ -x^2/2 & , x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}x|x|\right)' = \begin{cases} x & , x > 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases} = |x|, x \neq 0$$

En $x = 0$ el anterior cálculo no es aplicable, pero evaluando la derivada directamente por la definición,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x| - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = |0|$$

luego la fórmula $((1/2)x|x|)' = |x| \forall x$ es válida, y según el TFC, es equivalente a lo que pide probar el ejercicio.

Problema 7. Sea f derivable que cumple

$$\int_0^x f(t) dt = -\frac{1}{2} + x^2 + x \sin(2x) + \frac{1}{2} \cos(2x) \forall x \geq 0$$

Hallar $f(\pi/4)$, $f'(\pi/4)$:

Solución: Puesto que f es derivable, también es continua, y según el TFC, la integral del problema es una función derivable cuya derivada es f , luego

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[-\frac{1}{2} + x^2 + x \sin(2x) + \frac{1}{2} \cos(2x) \right]' \\ &= 2x + 2x \cos(2x) \forall x \geq 0 \\ \Rightarrow f'(x) &= 2 + 2 \cos(2x) - 4x \sin(2x) \forall x \geq 0 \end{aligned}$$

Con ello, deducimos inmediatamente $f(\pi/4) = \pi/2$, $f'(\pi/4) = 2 - \pi$.

Problema 8. Calcular $I = \int_0^1 f(x) dx$ con:

a) $f(x) = \frac{1}{e^x + 4e^{-x}}$:

Solución: Con $u = e^x$, $\frac{du}{u} = dx$

$$\int f(x) dx = \int \frac{1}{u + 4u^{-1}} \frac{du}{u} = \int \frac{du}{u^2 + 4} = \frac{1}{2} \arctan(u/2) + C = \frac{1}{2} \arctan(e^x/2) + C$$

luego

$$I = \frac{1}{2} \arctan(e^x/2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} [\arctan(e/2) - \arctan(1/2)]$$

b) $f(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}}$:

Solución: Con $u = e^x$, $\frac{du}{u} = dx$

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{u^2}{\sqrt{u+1}} \frac{du}{u} \\ &= \int \frac{u+1-1}{\sqrt{u+1}} du \\ &= \int [(u+1)^{1/2} - (u+1)^{-1/2}] du \\ &= \frac{2}{3} (e^x + 1)^{3/2} - 2(e^x + 1)^{1/2} + C \end{aligned}$$

luego

$$I = \frac{2}{3} \left[(e+1)^{3/2} - 2(e+1)^{1/2} - 2^{3/2} + 2^{1/2} \right]$$

c) $f(x) = \frac{4^x + 1}{2^x + 1}$:

Solución: Con $u = 2^x$, $\log 2 \frac{du}{u} = dx$

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \log 2 \int \frac{u^2 + 1}{u + 1} \frac{du}{u} \\ &= \log 2 \int \left[1 + \frac{1}{u} - \frac{2}{u + 1} \right] du \\ &= \log 2 [2^x + \log 2^x - 2 \log(2^x + 1)] \\ &= \log 2 [2^x + (\log 2)x - 2 \log(2^x + 1)] \end{aligned}$$

luego

$$I = \log 2 [1 + \log 2 - 2 \log 3]$$

d) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$:

Solución: Con $u = x^2$, $du = 2x dx$

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} \\ &= \frac{1}{2} \log(u + \sqrt{1+u^2}) \\ &= \frac{1}{2} \log(x^2 + \sqrt{1+x^4}) \end{aligned}$$

luego

$$I = \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2})$$

Problema 9. Calcular $I = \int_0^{\pi/4} f(x) dx$ con:

a) $f(x) = \tan x$:

Solución: Con $u = \cos x$, $du = -\sin x dx$

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= - \int \frac{du}{u} \\ &= -\log |\cos x| + C \end{aligned}$$

luego

$$I = -\log(\cos \frac{\pi}{4}) = -\log \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\log 2}{2}$$

b) $f(x) = \cos^4 x$:

Solución:

$$\begin{aligned} I = \int f(x) dx &= \int \cos^3 x d(\sin x) \\ &= \cos^3 x \sin x + 3 \int \cos^2 x \sin^2 x dx \\ &= \cos^3 x \sin x + 3 \int \cos^2 x dx - 3I \\ \Rightarrow I &= \frac{1}{4} \cos^2 x \sin x + \frac{3}{4} \int \cos^2 x dx \end{aligned}$$

Procediendo de igual modo para calcular $\int \cos^2 x \, dx$, obtenemos finalmente

$$I = \frac{1}{4} \cos^2 x \sin x + \frac{3}{8} (\cos x \sin x + x) + C$$

luego

$$I = \frac{1}{4} (1/\sqrt{2})^4 + \frac{3}{8} [(1/\sqrt{2})^2 + \frac{\pi}{4}] = \frac{1}{4} + \frac{3\pi}{32}$$

c) $f(x) = \tan^2 x$:

Solución:

$$\begin{aligned} \int f(x) \, dx &= \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1) \, dx \\ &= \tan x - x + C \end{aligned}$$

luego

$$I = \tan \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

d) $f(x) = \sin^5 x \cos^3 x$:

Solución: Podría intentarse integración por partes como en el caso b), pero una sustitución es más simple: $\sin x = u$, $dx = (1 - u^2)^{-1/2} du$

$$\begin{aligned} \int f(x) \, dx &= \int u^5 (1 - u^2)^{3/2} (1 - u^2)^{-1/2} du \\ &= \int u^5 (1 - u^2) \, du \\ &= \frac{\sin^6 x}{6} - \frac{\sin^8 x}{8} + C \end{aligned}$$

luego

$$I = \frac{(1/\sqrt{2})^6}{6} - \frac{(1/\sqrt{2})^8}{8} = \frac{1}{6 \cdot 8} - \frac{1}{8 \cdot 16}$$

Problema 10. Calcular el área de las siguientes regiones:

a) Región delimitada por el eje X y la gráfica de $f(x) = \sin x$, $0 \leq x \leq 8\pi$:

Solución: Tal área A es justamente $\int_0^{8\pi} |f(x)| \, dx$, pero $|\sin x|$ es una función periódica de período π , con $0 \leq \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, luego

$$A = 8 \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 8 \cdot 2 = 16$$

b) Región delimitada por el eje X y la gráfica de $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $0 \leq x \leq \pi$ (con $\lfloor x \rfloor := x - \{x\}$, parte fraccionaria de x):

Solución: Tal área A es $\int_0^{\pi} |f(x)| \, dx$, pero $f(x) \geq 0$, y es una función periódica de período 1, continua a trozos, luego tomando los intervalos

$[k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$ donde $\lfloor x \rfloor = x - k$,

$$\begin{aligned} A &= 3 \int_0^1 \lfloor x \rfloor \, dx + \int_3^{\pi} \underbrace{\lfloor x \rfloor}_{=x-3} \, dx \\ &= 3 \int_0^1 x \, dx + \int_0^{\pi-3} x \, dx \\ &= \frac{3}{2} + \frac{(\pi-3)^2}{2} \end{aligned}$$

Problema 11. Calcular el área de las regiones limitadas por las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{2}{4x^2 + 1}$, $g(x) = 2|x|$:

Solución: Observamos que las dos funciones son pares, luego basta ver dónde se cortan cuando $x \geq 0$, en cuyo caso $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{4x^2 + 1} = x \Leftrightarrow 1 = x(4x^2 + 1) = 4x^3 + x$. La función $u(x) = 4x^3 + x$ es estrictamente creciente con $u(1/2) = 1$, luego el único punto $x \geq 0$ con $f(x) = g(x)$ es $x = 1/2$, y para $|x| \leq 1/2$, $g(x) \leq f(x)$. Por tanto el área delimitada por esas dos funciones es

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1/2}^{1/2} [f(x) - g(x)] dx \\ &= 2 \int_0^{1/2} [f(x) - g(x)] dx; \quad f, g \text{ pares} \\ &= 2 \int_0^{1/2} \left[\frac{2}{4x^2 + 1} - 2x \right] dx \\ &= 4 \left\{ \frac{1}{2} \arctan(2x) - \frac{x^2}{2} \right\}_0^{1/2} \\ &= 4 \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{8} \right] = 2\pi - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) $f(x) = x(e^x + 1)$, $g(x) = x + x^2e^x$:

Solución: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow xe^x + x = x^2e^x + x \Leftrightarrow x = x^2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$. Para $0 \leq x \leq 1$, $f(x) - g(x) = x(1 - x)e^x \geq 0$, luego el área A limitada por las curvas es

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx \\ &= \int_0^1 e^x(x - x^2) dx \\ &= \int_0^1 (x - x^2) d(e^x) \\ &= (x - x^2)e^x \Big|_0^1 + \int_0^1 e^x(2x - 1) dx \\ &= 0 + (2x - 1)e^x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 e^x dx \\ &= 2e + 1 - 2(e - 1) = 3 \end{aligned}$$

Problema 12. Calcular el área del triángulo curvilíneo delimitado por la función $f(x) = x^2 - 2x + 7$ y sus tangentes en $x = 0$, $x = 7$:

Solución: Las tangentes en los puntos considerados son

$$r_1 \equiv y = -2x + 7, \quad r_2 \equiv y = 2(x - 2) + 7$$

y tales tangentes se mantienen siempre por debajo de la gráfica de f porque f es convexa. Tales tangentes además se cortan para $x = 1$, luego el área A de tal región

es $A = \int_0^2 [f(x) - g(x)] dx$, con $g(x) = \begin{cases} -2x + 7 & , 0 \leq x \leq 1 \\ 2(x - 2) + 7 & , 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Entonces,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 [f(x) - g(x)] dx \\ &= 2 \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx \\ &= 2 \int_0^1 x^2 dx \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Problema 13. Hallar el área de la región delimitada por la curva $y^2 = 3x$ y la recta $2y - 2x + 3 = 0$.

Solución: La parábola $y^2 = 3x$ no puede escribirse como una función $y = y(x)$ pero sí como una función $x = x_1(y) = y^2/3$; lo mismo puede hacerse con la recta: $x = x_2(y) = y + 3/2$. Hecho ésto, el área de la región delimitada por esas curvas la podemos como

$$A = \int_{y_-}^{y_+} [x_2(y) - x_1(y)] dy = \frac{y^2}{2} + \frac{3}{2}y - \frac{y^3}{6} \Big|_{y_-}^{y_+}$$

con $y_{\pm}$ que cumplen $y^2/3 = y + 3/2 \Leftrightarrow y_{\pm} = \frac{3}{2}(1 \pm \sqrt{3})$.

Problema 14. Hallar el área de la región delimitada por la curva $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$:

Solución: La región E es el interior de una elipse de semiejes $a, b > 0$, y también puede escribirse

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq a, y_-(x) \leq y \leq y_+(x)\}, \quad y_{\pm}(x) = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad -a \leq x \leq a$$

luego el área A de la región E es

$$\begin{aligned} A &= \int_{-a}^a [y_+(x) - y_-(x)] dx \\ &= 2 \int_{-a}^a y_+(x) dx \\ &= 2 \int_{-a}^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx; \quad x = at \\ &= 2ab \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} dt \end{aligned}$$

Por tanto, el anterior cálculo, que elimina los parámetros a, b , reduce la solución a

calcular la integral $I = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$. Para ello,

$$\begin{aligned}
 I &= 2 \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt \\
 &= t\sqrt{1-t^2} \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{1-t^2-1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
 &= 0 - I + 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
 \Rightarrow I &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
 &= \arcsen t \Big|_0^1 \\
 &= \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

de dónde

$$A = (2ab) \frac{\pi}{2} = \pi ab$$

(Nota: En realidad, el cálculo anterior al final acaba involucrando una integral impropia: $t \mapsto (1-t^2)^{-1/2}$ diverge cuando $t \rightarrow 1-$, pero entendiendo tal cálculo como $\lim_{x \rightarrow 1+} \int_0^x (1-t^2)^{-1/2} dt$, es correcto).

Problema 15. Calcular las siguientes integrales impropias:

a) $I = \int_0^\infty e^{-5x} dx$:

Solución: Es integral impropia por ser la integral de una función continua, pero en un intervalo no-acotado. Entonces entendemos

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R d \left(-\frac{1}{5} e^{-5x} \right) \\
 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{5} e^{-5x} \Big|_0^R \right\} \\
 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{5} (1 - e^{-5R}) \\
 &= \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

b) $I = \int_0^1 \log x dx$:

Solución: Es integral impropia por ser la integral de una función no-acotada: $\lim_{x \rightarrow 0+} \log x = -\infty$. Entonces entendemos

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_\epsilon^1 \log x dx$$

Por otra parte, integrando por partes (o bien, derivando directamente), puede comprobarse fácilmente que

$$\int \log x dx = x \log x - x + C$$

de dónde

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left\{ x \log x - x \Big|_\epsilon^1 \right\} \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \{-1 + \epsilon - \epsilon \log \epsilon\} \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

c) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 x} dx$:

Solución: Es integral impropia por ser la integral de una función no-acotada:

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{1}{\cos^2 x} = \infty$$

Entonces entendemos

$$I = \lim_{t \rightarrow \pi/2^-} \int_0^t \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

Por otra parte, $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, luego

$$\begin{aligned} I &= \lim_{t \rightarrow \pi/2^-} \left\{ \frac{1}{\cos^2 x} \Big|_0^t \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow \pi/2^-} \{\tan t - 1\} \\ &= \infty \end{aligned}$$

Problema 16. Estudiar la convergencia de las siguientes series por el Criterio de la Integral:

a) $S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$:

Solución: $f(x) = \frac{1}{x \log^2 x}$ es decreciente para $x \geq 2$, pues $f(x) = (x^{-1})(\log^{-2} x)$, que es un producto de funciones decrecientes para $x > 1$. Por tanto, el Criterio de la Integral es aplicable y la convergencia de S equivale a la $I = \int_2^{\infty} f(x) dx$. Pero

$$\int f(x) dx = -\log^{-1} x + C$$

luego

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_2^R f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} [\log^{-1} 2 - \log^{-1} R] = \log^{-1} 2$$

luego la serie S converge.

b) $S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$:

Solución: $f(x) = \frac{1}{x \log x}$ es decreciente para $x \geq 2$, pues $f(x) = (x^{-1})(\log^{-1} x)$, que es un producto de funciones decrecientes para $x > 1$. Por tanto, el Criterio de la Integral es aplicable y la convergencia de S equivale a la $I = \int_2^{\infty} f(x) dx$. Pero

$$\int f(x) dx = \log(\log x) + C$$

luego

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_2^R f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} [\log(\log R) - \log(\log 2)] = \infty$$

luego la serie S diverge.

c) $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$:

Solución: $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ es decreciente para $x \geq 0$ ($f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} \leq 0$, $x \geq 0$). Por tanto, el Criterio de la Integral es aplicable y la convergencia de S equivale a la $I = \int_0^{\infty} f(x) dx$. Pero

$$\int f(x) dx = \arctan x + C$$

luego

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} [\arctan R] = \frac{\pi}{2}$$

luego la serie S converge.